

Wzory, których
NIE ZNAJDZIESZ

w tablicach
maturalnych,

A MUSISZ JE ZNAĆ!



MateMat

KURSY DLA CIEBIE

Spis treści

I Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne.....1

- błąd rzeczywisty i względny
- średnia prędkość
- zapis liczb
- jakim procentem liczby a jest liczba b ?
- procent składany
- usuwanie niewymierności z mianownika ułamka
- działania na pierwiastkach
- liczba przeciwna i liczba odwrotna
- NWD i NWW
- jednostki

II Cechy podzielności liczb.....7

- liczba jest podzielna przez

III Funkcje.....8

- definicje
- numery ćwiartek w układzie współrzędnych
- przesuwanie wykresów funkcji
- odbicie lustrzane wykresów funkcji

IV Geometria płaska.....11

- wzór na przekątną kwadratu
- własność dla trójkąta równobocznego
- własność dla trójkąta prostokątnego
- Własności trójkąta 30° , 60° , 90°

V Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach.....12

- kąty w graniastosłupach
- kąty w ostrosłupach

VI Znaki matematyczne.....16



@matemat_kursyedukacyjne



KOREPETYCJE_MATEMAT



Facebook
Kursy Edukacyjne -
Mateusz Jarosz



Pinterest
szkolamatemat



YouTube
MateMatkursy

I Liczby rzeczywiste, zbiory, wyrażenia algebraiczne

1. Błąd bezwzględny i względny.

Oznaczamy:

r – wielkość rzeczywista,

p – wielkość przybliżona.

Błąd bezwzględny: $BB = |r - p|$

Błąd względny: $BW = \frac{|r-p|}{|r|}$

Błąd względny procentowy: $BW\% = \frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\%$

Przykład 1.

Rzeczywista wysokość drzewa wynosi 5,6 m. Jacek oszacował wysokość drzewa i otrzymał wynik 5,4 m. Oblicz błąd bezwzględny, błąd względny oraz błąd względny procentowy pomiaru Jacka.

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

$r = 5,6\text{m}$

$p = 5,4\text{m}$

$BB = |r - p| = |5,6 - 5,4| = 0,2\text{m}$

$BW = \frac{|r-p|}{|r|} = \frac{|5,6-5,4|}{|5,6|} = 0,0357$

$BW\% = \frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\% = \frac{|5,6-5,4|}{|5,6|} \cdot 100\% = 0,0357 \cdot 100\% = 3,57\%$

2. Średnia prędkość

Wzór na prędkość to stosunek drogi do czasu, który możemy opisać wzorem: $v = \frac{s}{t}$

Przekształcenie wzoru na prędkość na wzór na drogę (s):

$$v = \frac{s}{t} / \cdot t$$

$$s = v \cdot t$$

Przekształcenie wzoru na prędkość na wzór na czas (t):

$$v = \frac{s}{t} / \cdot t$$

$$v \cdot t = s / : v$$

$$t = \frac{s}{v}$$

UWAGA: Nie można liczyć średniej prędkości ze średniej arytmetycznej.

Przykład 1.

Obliczyć średnią prędkość jazdy samochodu, który dystans 100km pokonał w 2 godziny.

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

$$s = 100\text{km}$$

$$t = 2\text{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{100\text{km}}{2\text{h}}$$

$$v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Przykład 2.

Oblicz średnią prędkość jazdy samochodu, który dystans 30 km pokonał 15 minut

Wynik podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Rozwiązanie:

UWAGA: Pamiętaj o zamianie jednostek.

$$1\text{h} = 60\text{min}$$

$$15\text{min} = \frac{15}{60}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h}$$

Oznaczamy:

$$s = 30\text{km}$$

$$t = 15\text{min} = \frac{1}{4}\text{h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{30\text{km}}{\frac{1}{4}\text{h}}$$

$$v = 30\text{km} : \frac{1}{4}\text{h}$$

$$v = 30\text{km} : 4 \frac{1}{\text{h}}$$

$$v = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

3. Zapis liczb

Liczba parzysta: $x = 2n$

Liczba nieparzysta: $x = 2n + 1$

Liczba podzielna przez 5 : $x = 5n$

Liczba, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3: $x = 7n + 3$

Dwie kolejne liczby parzyste: $2n, 2n + 2$

Dwie kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1, 2n + 3$

(liczba n jest liczbą całkowitą)

Przykład 1.

Wykaż że dla **każdej liczby naturalnej n** , liczba $6n^2 + 9n + 8$ **przy dzieleniu przez 3** daje **resztę 2**

Rozwiązanie:

a) Mamy udowodnić to dla liczby " n " więc wyciągamy ją przed nawias

$$n(6n + 9) + 8$$

b) Przy dzieleniu przez 3, wyciągamy przed nawias cyfrę 3

$$n(6n + 9) + 8 \rightarrow 3n(2n + 3) + 8$$

c) Daje resztę 2, ponieważ

$$3n(2n + 3) + 8 \rightarrow 3n(2n + 3) + 2^3$$

lub

$$3n(2n + 3) + 8 \rightarrow 3n(2n + 3) + 2 \cdot 2 \cdot 2$$

4. Jakim procentem liczby a jest liczba b ?

$$\frac{b}{a} \cdot 100\%$$

Przykład 1.

Jakim procentem liczby 60 jest liczba 25?

Rozwiązanie:

$$\frac{25}{60} \cdot 100\% = 41\frac{2}{3} \%$$

5. Procent składany- najczęściej związany z lokatami bankowymi.

K – kapitał końcowy,

K_o – kapitał początkowy,

p – roczna stopa procentowa,

n – liczba lat trwania lokaty,

m – liczba okresów kapitalizacji w ciągu roku.

Wzór bez podatku: $K = K_o \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$

Wzór z podatkiem 20%: $K = K_o \cdot \left(1 + 0,8 \cdot \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$

Przykład 1.

Wpłacamy 10 000 zł na dwuletnią lokatę do banku. Roczna stopa procentowa wynosi 4%. Oblicz kapitał po zakończeniu lokaty w przypadku, gdy:

a) odsetki kapitalizowane są co roku,

b) odsetki kapitalizowane są co pół roku,

c) odsetki kapitalizowane są co kwartał.

Uwzględnij 20-procentowy podatek od odsetek.

Rozwiązanie:

a)

K- kapitał końcowy

$$K_o = 10\,000 \text{ zł}$$

$$p = 4, n = 2, m = 1$$

$$K = 10\,000 \cdot \left(1 + 0,8 \cdot \frac{4}{100 \cdot 1}\right)^{1 \cdot 2} = 10\,650,24 \text{ zł}$$

b)

K- kapitał końcowy

$$K_o = 10\,000 \text{ zł}$$

$$p = 4, n = 2, m = 2$$

$$K = 10\,000 \cdot \left(1 + 0,8 \cdot \frac{4}{100 \cdot 2}\right)^{2 \cdot 2} = 10\,655,52 \text{ zł}$$

c)

K- kapitał końcowy

$$K_o = 10\,000 \text{ zł}$$

$$p = 4, n = 2, m = 4$$

$$K = 10\,000 \cdot \left(1 + 0,8 \cdot \frac{4}{100 \cdot 4}\right)^{4 \cdot 2} = 10\,658,21 \text{ zł}$$

6. Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Przykłady.

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\text{c) } \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3} - 1$$

7. Działania na pierwiastkach

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^m b^n}$$

Przykłady:

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[20]{7}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4 3^3}$$

8. Liczba przeciwna i liczba odwrotna

Dana liczba	Liczba przeciwna	Liczba odwrotna
x	-x	$\frac{1}{x}$
5	-5	$\frac{1}{5}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$
$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. NWD i NWW

NWD- największy wspólny dzielnik

NWW- najmniejsza wspólna wielokrotność

Przykład 1.

Wyznacz NWD i NWW liczb 72 i 60.

Rozwiązanie:

Rozkładamy liczby na czynniki pierwsze:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Czynniki powtarzające się w obu liczbach

NWD jest iloczynem czynników powtarzających się, czyli

$$\text{NWD}(72, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

NWW jest iloczynem jednej liczby i czynników nie powtarzających się z drugiej liczby, czyli

$$\text{NWW}(72, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 72 \cdot 5 = 60 \cdot 2 \cdot 3 = 360$$

10. Jednostki

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10\,000 \text{ dm} = 100\,000 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2 = 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ kg} = 100 \text{ dag} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} \text{ (1 tona} = 1000 \text{ kg)}$$

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3 \text{ (1 litr} = 1 \text{ dm}^3)$$

II Cechy podzielności liczb

1. Liczba jest podzielna:

- ☐ przez 2, jeżeli jest liczbą parzystą (cyfrą jednoścí jest 0, 2, 4, 6, lub 8)
- ☐ przez 3, jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3
- ☐ przez 4, jeżeli dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4
- ☐ przez 5, jeżeli cyfrą jednoścí jest 5 lub 0
- ☐ przez 8, jeżeli liczba zapisana trzema ostatnimi jej cyframi dzieli się przez 8
- ☐ przez 9, jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 9
- ☐ przez 10, jeżeli cyfrą jednoścí jest 0
- ☐ przez 25, jeżeli dwie ostatnie cyfry tej liczby to 00, 25, 50 lub 75

III Funkcje

1. Definicje

Oś odciętych - to oś x-ów

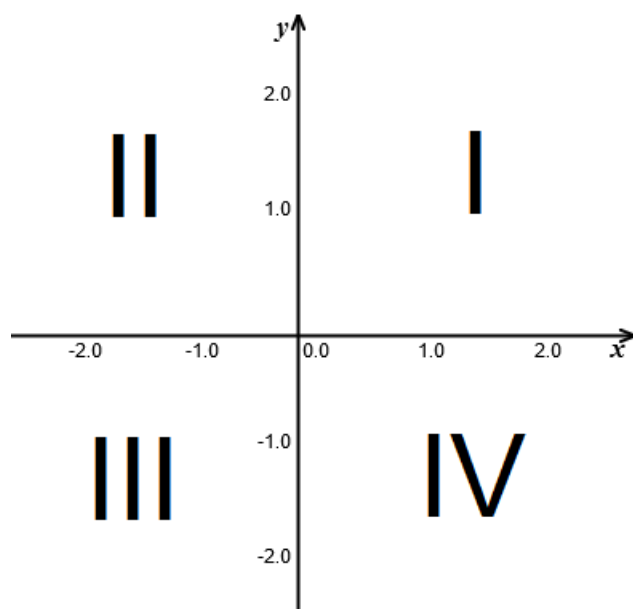
Oś rzędnych - to oś y-ów

Miejsce zerowe - to argument x , dla którego funkcja przecina się z osią x-ów. Gdy mamy wzór funkcji $f(x)=\text{wzór}$, to miejsca zerowe wyliczamy rozwiązując równanie: $\text{wzór}=0$

Dziedzina - to zbiór wszystkich x-ów funkcji

Zbiór wartości - to zbiór wszystkich y-ów funkcji

2. Numery ćwiartek w układzie współrzędnych



3. Przesuwanie wykresów funkcji

$g(x) = f(x) + q \rightarrow$ przesunięcie o q jednostek w górę na osi OY

$g(x) = f(x) - q \rightarrow$ przesunięcie o q jednostek w dół na osi OY

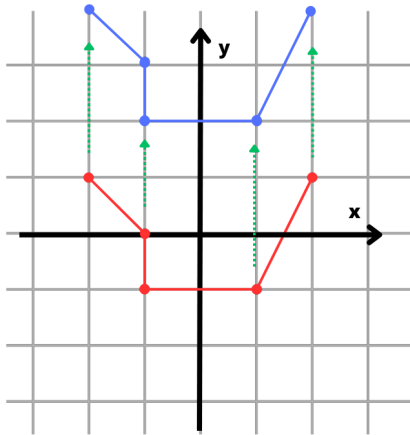
$g(x) = f(x - p) \rightarrow$ przesunięcie o p jednostek w prawo na osi OX

$g(x) = f(x + p) \rightarrow$ przesunięcie o p jednostek w lewo na osi OX

Przykład 1.

$$g(x) = f(x) + 3$$

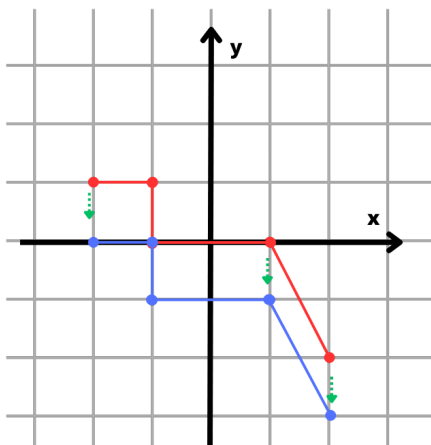
Rozwiązanie:



Przykład 2.

$$g(x) = f(x) - 1$$

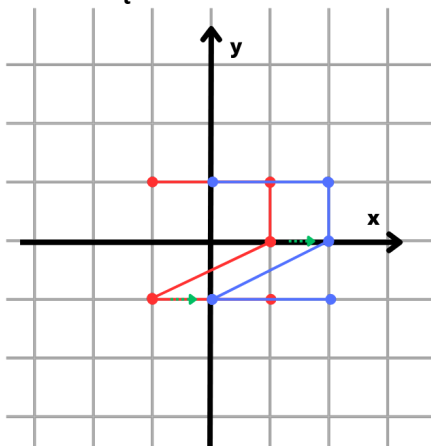
Rozwiązanie:



Przykład 3.

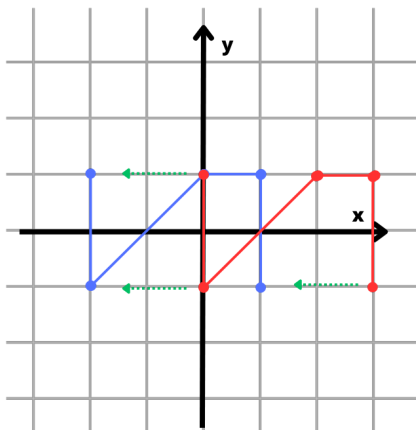
$$g(x) = f(x - 1)$$

Rozwiązanie:



Przykład 4.

$$g(x) = f(x + 2)$$

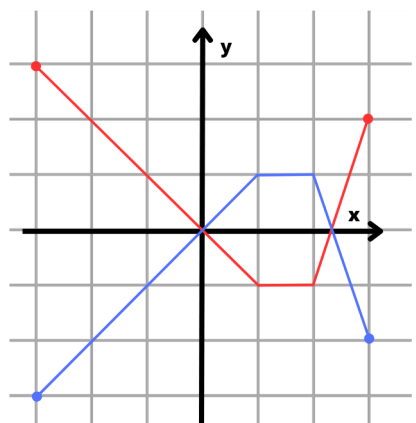
Rozwiązanie:**4. Odbicie lustrzane wykresów funkcji**

Rysując wykres funkcji $y = -f(x)$ na podstawie wykresu $y = f(x)$, odbijamy ten wykres symetrycznie względem osi OX

Rysując wykres funkcji $y = f(-x)$ na podstawie wykresu $y = f(x)$, odbijamy ten wykres symetrycznie względem osi OY

Przykład 1.

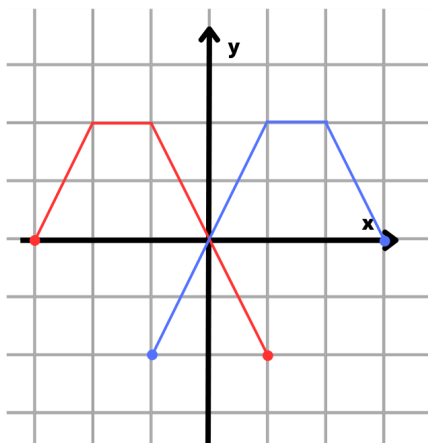
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ na rysunku, narysuj wykres funkcji $y = -f(x)$

Rozwiązanie:

Przykład 2.

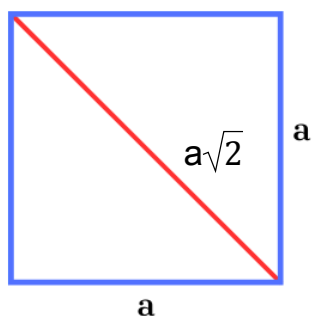
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ na rysunku, narysuj wykres funkcji $y = f(-x)$

Rozwiązanie:

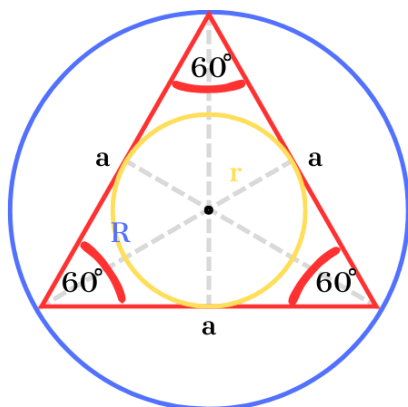


IV Geometria płaska

1. Wzór na przekątną kwadratu



2. Własność dla trójkąta równobocznego



$$R = 2r$$

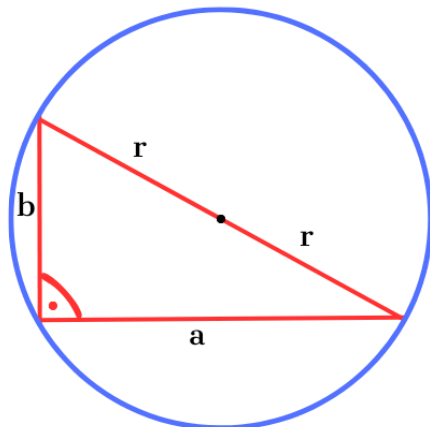
$$R = \frac{2}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

h - wysokość trójkąta równobocznego

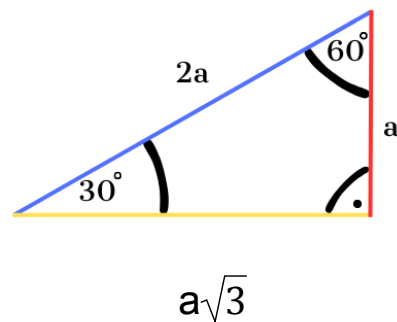
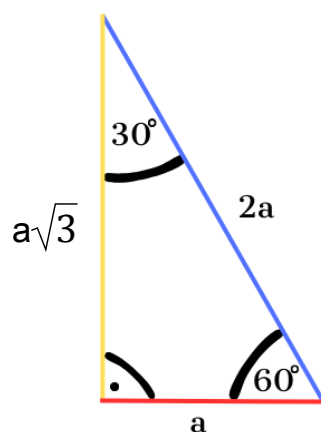
Wysokości w trójkącie równobocznym przecinają się w stosunku 2 : 1

3. Własność dla trójkąta prostokątnego



Środek okręgu opisanego leży dokładnie na środku przeciwprostokątnej

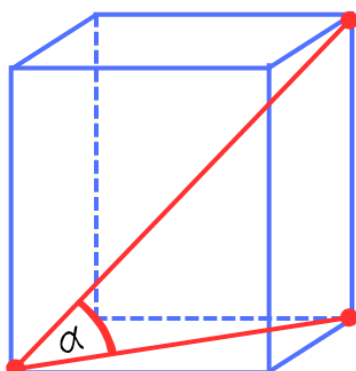
4. Własności trójkąta 30° , 60° , 90°



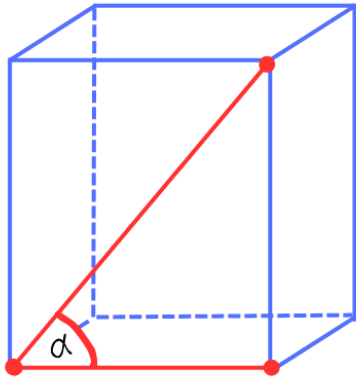
V Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach

1. Kąty w graniastosłupach

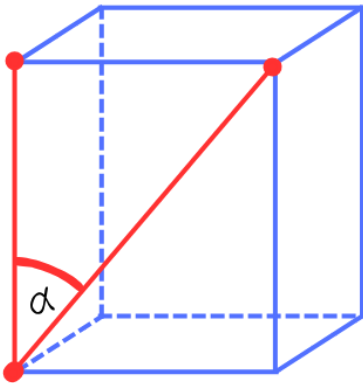
a) kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy



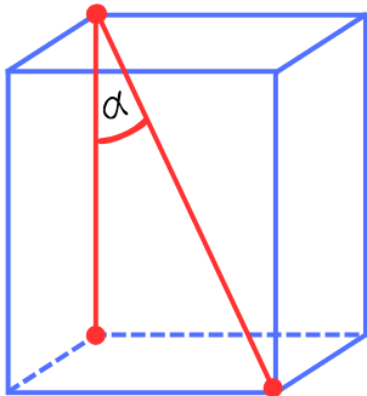
b) kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy



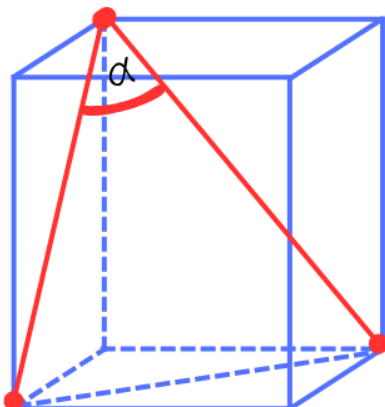
c) kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi bocznej



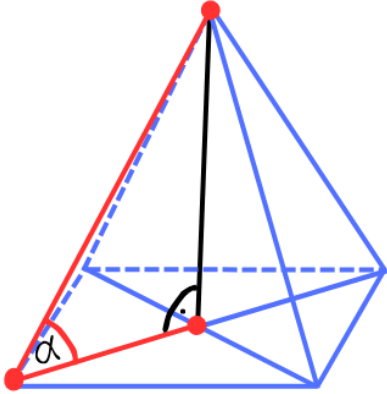
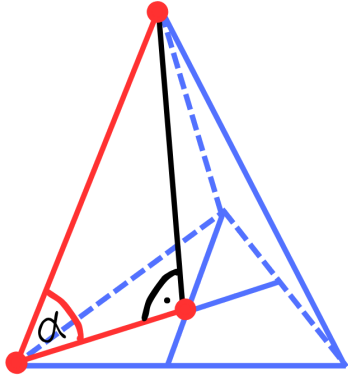
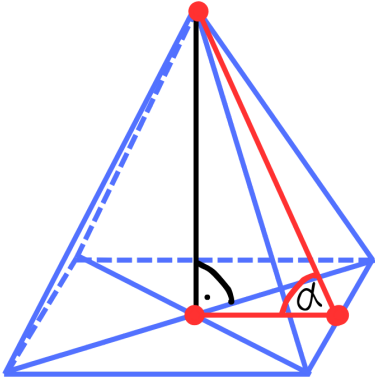
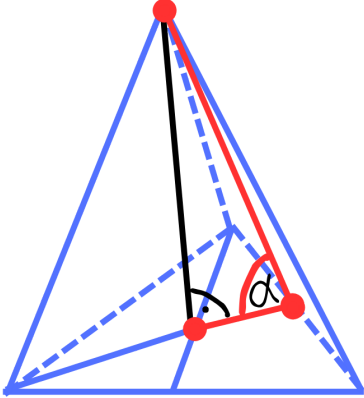
d) kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną



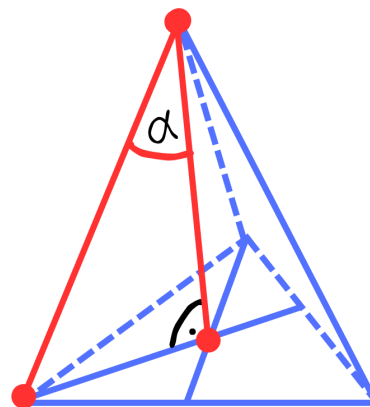
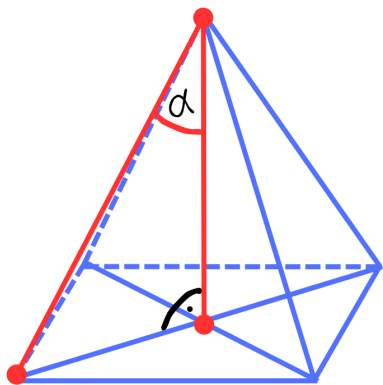
e) kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych



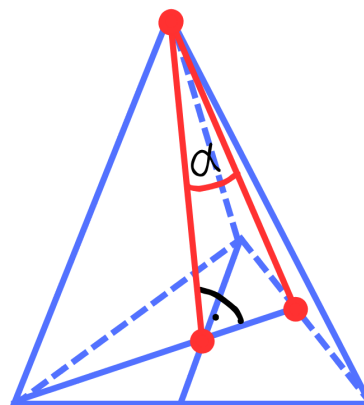
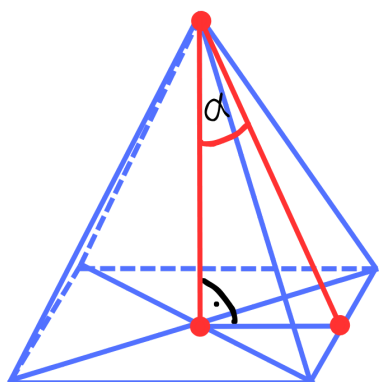
2. Kąty w ostrosłupach

Ostrosłup prawidłowy czworokątny	Ostrosłup prawidłowy trójkątny
kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy	
	
kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy	
	

kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną



kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej



VI Znaki matematyczne

$p \wedge q$	p i q (koniunkcja)
$p \vee q$	p lub q (alternatywa)
$\emptyset$	zbiór pusty
$a \in A$	element a należy do zbioru A
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem B (inkluzja)
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	część wspólna zbiorów A i B (iloczyn, przekrój)
A / B	różnica zbiorów A i B
$[a, b], \langle a, b \rangle$	przedział domknięty o początku a i końcu b
$n!$	n silnia
$\log_a b$	logarytm liczby b przy podstawie a
$\log b$	logarytm dziesiętny ($\log_{10} b$)
a^n	a do n -tej potęgi
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek n -tego stopnia z a
$\sqrt{a}$	pierwiastek kwadratowy z a
∞	nieskończoność
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$P(A)$	prawdopodobieństwo zdarzenia A